

2022年

東大数学

文系第1問 ①

(1)

まずは、 $b \in \mathbb{Q}$ で表し、 b の範囲を求めよ

必ずしも必要ではない

解法1: 傾きを m とおき、放物系と連立.

原点を通る直線の傾きを m とすると、 $y = mx$ 、
放物系 C と接するので、連立し、

$$x^2 + ax + b = mx \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (a-m)x + b = 0 \quad (*)$$

この2次方程式が重解を持つため、

$$\begin{aligned} \text{(判別式)} &= (a-m)^2 - 4b = 0 \\ m^2 - 2am + a^2 - 4b &= 0 \quad (**) \end{aligned}$$

ここで、 l_1, l_2 が存在するため、(**) が m の異なる実数解をもつから、

$$\begin{aligned} \text{(判別式)}/4 &= (-a)^2 - (a^2 - 4b) > 0 \\ \therefore b &> 0 \end{aligned}$$

(**) の m の2解を m_1, m_2 とすると、 m_1, m_2 は

l_1, l_2 の傾きである。

解と係数の関係から、

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 2a & \leftarrow \text{使わないけれど、一応おいておく} \\ m_1 m_2 = a^2 - 4b & \leftarrow \text{使う} \end{cases}$$

l_1 と l_2 は直交するので、 $m_1 m_2 = -1$

$$\therefore a^2 - 4b = -1 \quad b = \frac{a^2 + 1}{4}$$

解法2: $x = t$ での接線が原点を通る

$y = x^2 + ax + b$ に対し、 $y' = 2x + a$

放物系上の $(t, t^2 + at + b)$ での接線は

$$y - (t^2 + at + b) = (2t + a)(x - t)$$

これが原点を通るので、

$$0 - (t^2 + at + b) = (2t + a)(0 - t)$$

$$\therefore t^2 = b$$

ここで、 t の異なる2実数解があれば、

l_1, l_2 が存在するため、 $t^2 = b > 0$

t の解を求めよ、 $t = \pm\sqrt{b}$

$$\begin{cases} t = -\sqrt{b} \text{ の場合、} l_1 \text{ に対応し、傾きは } a - 2\sqrt{b} \\ t = \sqrt{b} \quad : \quad l_2 \quad : \quad : \quad a + 2\sqrt{b} \end{cases}$$

直交するので、 $(a - 2\sqrt{b})(a + 2\sqrt{b}) = -1$

$$\therefore b = \frac{a^2 + 1}{4}$$

次に、 a が全ての実数をとることを示す。

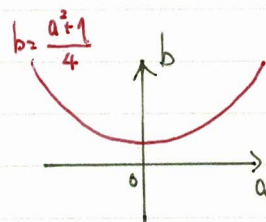
解法a.

$b = \frac{a^2 + 1}{4}$ に対し、全ての実数 a で $b > 0$ を満たすため、 a は全ての実数をとる。

解法b

$b = \frac{a^2 + 1}{4}$ のグラフは右の通り。

グラフより、全ての実数 a で $b > 0$ を満たす。



解法c

(**) が異なる2つの実数解を持つためには、

$$b = \frac{a^2 + 1}{4} \text{ を代入すると}$$

$$\begin{aligned} \text{(判別式)}/4 &= (-a)^2 - (a^2 - 4b) \\ &= a^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

これは全ての実数 a で成立する。

※ 解法aとあまり変わりない。

(*) を逆用、2も可能という。

2022年

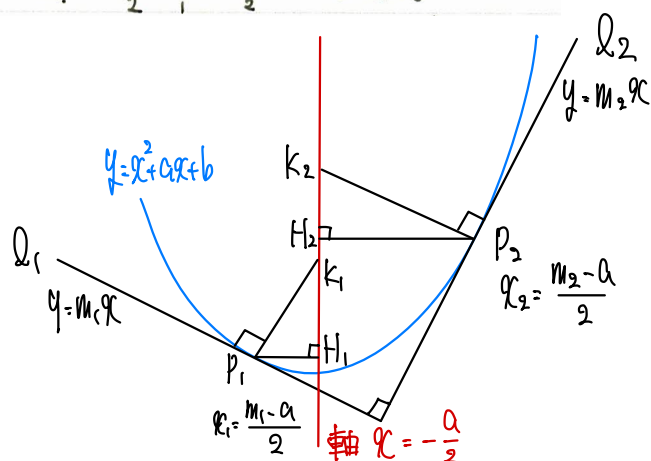
東大数学

文系第1問②

(2)

解法3: 解法1の続きから。

$$(*) \Leftrightarrow \left(x + \frac{a-m_1}{2}\right)^2 = 0 \quad (\because (1))$$

したがって、Cと l_1 , l_2 の交点 P_1 , P_2 のx座標は、 $\frac{m_1-a}{2}$, $\frac{m_2-a}{2}$ である。


解法3-1. 相似の利用

 $\triangle P_1 K_1 H_1 \sim \triangle K_2 P_2 H_2$ から。

$$P_1 K_1 : K_1 H_1 : H_1 P_1 = K_2 P_2 : P_2 H_2 : H_2 K_2 \quad - (1)$$

線分 $P_1 K_1 \parallel l_2$ したがって、 $P_1 H_1 : H_1 K_1 = 1 : m_2$

$$\therefore H_1 K_1 = m_2 P_1 H_1 \quad - (2)$$

仮定より $P_1 K_1 : P_2 K_2 = 1 : 2$

よって、 $\triangle P_1 K_1 H_1 \sim \triangle K_2 P_2 H_2$ の相似比は $1 : 2$

- (3)

$$\begin{cases} P_1 H_1 = -\frac{a}{2} - \frac{m_1-a}{2} = -\frac{m_1}{2} \\ P_2 H_2 = \frac{m_2-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{m_2}{2} \end{cases} \quad - (4)$$

①③ から、 $K_1 H_1 : P_2 H_2 = 1 : 2$

$$\therefore P_2 H_2 = 2 K_1 H_1 \quad \downarrow (2)$$

$$P_2 H_2 = 2 m_2 P_1 H_1 \quad \downarrow (4)$$

$$\frac{m_2}{2} = 2 m_2 \left(-\frac{m_1}{2}\right)$$

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{2}$$

($m_1 m_2 = -1$ から $m_2 = 2$)

$$(*) \text{ に代入して } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{1}{2}\right) + a^2 - 4 \cdot \frac{a^2+1}{4} = 0$$

 $m_1 \in$
 $m_2 \neq 0$

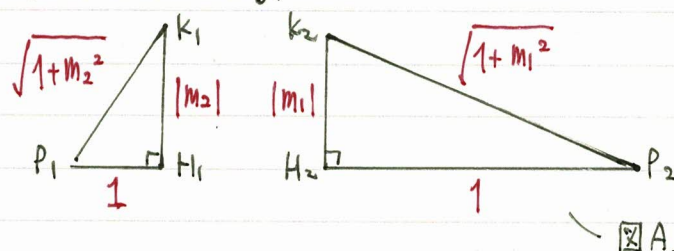
$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

解法3-2. 傾きの利用。

直線 $P_1 K_1 \parallel l_2$, 直線 $P_2 K_2 \parallel l_1$ から。

 $\triangle P_1 H_1 K_1 \sim \triangle P_2 H_2 K_2$ の

3辺の比は下の図。



$$\begin{cases} P_1 H_1 = -\frac{a}{2} - \frac{m_1-a}{2} = -\frac{m_1}{2} \\ P_2 H_2 = \frac{m_2-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{m_2}{2} \end{cases} \quad \text{から}$$

$$\begin{cases} P_1 K_1 = \sqrt{1+m_2^2} \times \left(-\frac{m_1}{2}\right) \\ P_2 K_2 = \sqrt{1+m_1^2} \times \frac{m_2}{2} \end{cases}$$

$$P_1 K_1 : P_2 K_2 = 1 : 2 \text{ したがって}$$

$$\sqrt{1+m_2^2} \left(-\frac{m_1}{2}\right) \times 2 = \sqrt{1+m_1^2} \times \frac{m_2}{2} \quad \text{あとは解く}$$

$$(1+m_2^2) \cdot \frac{1}{2} m_1^2 \times 2 = (1+m_1^2) \times \frac{1}{4} m_2^2 \quad \downarrow \text{2乗}$$

$$(1+m_2^2) \times \frac{1}{m_2^2} = \left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right) \times \frac{1}{4} m_2^2 \quad \downarrow m_1 m_2 = -1$$

$$m_2^2 = 4$$

 $m_1 m_2 = -1$ と $m_1 < m_2$ から $m_2 > 0$ したがって

$$m_2 = 2, \quad (m_1 = -\frac{1}{2} \text{ もわかる})$$

$$(*) \text{ に代入して } 4 - 2a \cdot (-2) + a^2 - 4 \cdot \frac{a^2+1}{4} = 0$$

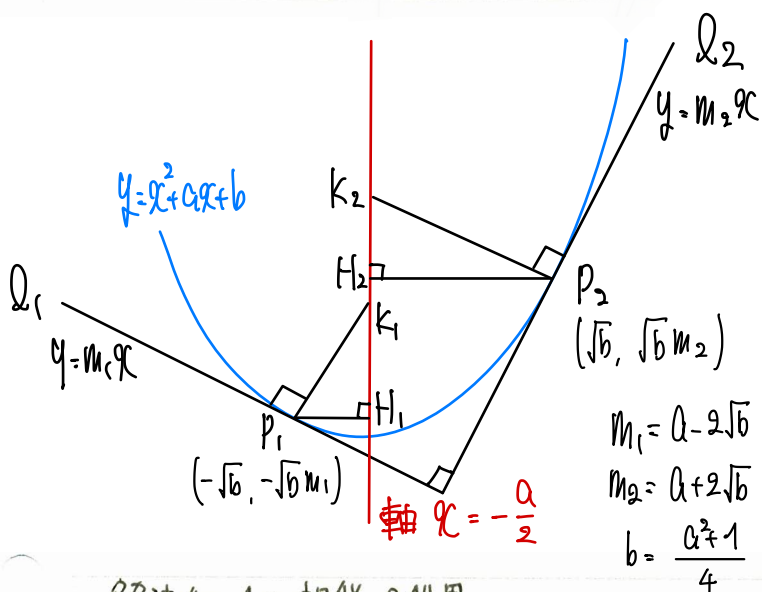
$$a = \frac{3}{4}$$

2022年

東大数学

文系第1問 ③

解法4: 解法2の続きから.



解法4-1: 相似の利用.

(解法3-1の①~③を利用する)

$$\begin{cases} P_1 H_1 = -\frac{a}{2} - (-\sqrt{b}) = \sqrt{b} - \frac{a}{2} \\ P_2 H_2 = \sqrt{b} - (-\frac{a}{2}) = \sqrt{b} + \frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{--- ⑤}$$

①③より $K_1 H_1 : P_2 H_2 = 1 : 2$

$$P_2 H_2 = 2 K_1 H_1$$

$$P_2 H_2 = 2 m_2 P_1 H_1 \quad \downarrow \text{②}$$

$$\sqrt{b} + \frac{a}{2} = 2 m_2 \left(\sqrt{b} - \frac{a}{2} \right) \quad \downarrow \text{⑤}$$

$$\sqrt{b} + \frac{a}{2} = 2(a + 2\sqrt{b}) \left(\sqrt{b} - \frac{a}{2} \right) \quad \downarrow m_2 = a + 2\sqrt{b}$$

$$\frac{1}{2}(a + 2\sqrt{b}) = (a + 2\sqrt{b})(2\sqrt{b} - a) \quad \downarrow b = \frac{a^2 + 1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 1}{4}} - a$$

$$a + \frac{1}{2} = \sqrt{a^2 + 1} \quad \downarrow \text{2乗}$$

$$a^2 + a + \frac{1}{4} = a^2 + 1$$

$$a = \frac{3}{4}$$

解法4-2: 傾きを利用

(解法3-2の図Aと、解法4-1の⑤を利用する)

図Aの相似より⑤から.

$$\begin{cases} P_1 K_1 = \sqrt{1 + m_2^2} \times \left(\sqrt{b} - \frac{a}{2} \right) \\ P_2 K_2 = \sqrt{1 + m_1^2} \times \left(\sqrt{b} + \frac{a}{2} \right) \end{cases}$$

$$P_1 K_1 : P_2 K_2 = 1 : 2 \quad \text{たのび}$$

$$\sqrt{1 + m_2^2} \left(\sqrt{b} - \frac{a}{2} \right) \times 2 = \sqrt{1 + m_1^2} \left(\sqrt{b} + \frac{a}{2} \right)$$

$$-\sqrt{1 + m_2^2} \underbrace{(a - 2\sqrt{b})}_{m_1} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + m_1^2} \underbrace{(a + 2\sqrt{b})}_{m_2}$$

$$-m_1 \sqrt{1 + m_2^2} = \frac{1}{2} m_2 \sqrt{1 + m_1^2} \quad \downarrow \text{2乗}$$

$$m_1^2 (1 + m_2^2) = \frac{1}{4} m_2^2 (1 + m_1^2)$$

しばらく、解法3-2の後半と同じ計算

$$m_1 = -\frac{1}{2} \quad m_2 = 2. \quad \text{たのび}$$

$$\begin{cases} a - 2\sqrt{b} = -\frac{1}{2} \\ a + 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \quad \text{辺々足して} \quad 2a = \frac{3}{2} \quad a = \frac{3}{4}$$

解法5: 法線ベクトルの利用.

Q_1 の傾きは m_1 たのび

方向ベクトルは $(1, m_1)$

よって $P_1 K_1$ の方向ベクトルは

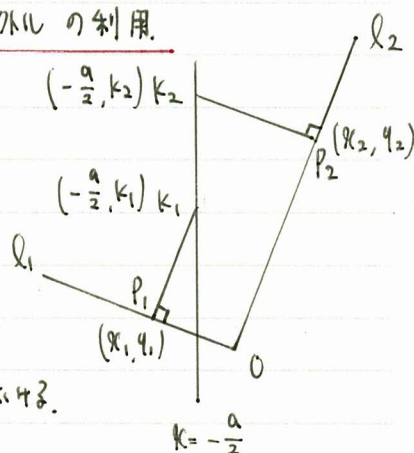
$$(m_1, -1)$$

よって

$$P_1 K_1 = s(m_1, -1) \quad \text{とおく}$$

$$\left(-\frac{a}{2} - x_1, k_1 - y_1 \right) = s(m_1, -1)$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{a}{2} - x_1 = s m_1 & \text{--- ⑥} \\ k_1 - y_1 = -s & \text{--- ⑦} \end{cases}$$



2022年

東大数学

文系第1問④

解法 5-1 解法 1 の続き

$$x_1 = \frac{m_1 - a}{2} \quad y_1 = m_1 x_1 = m_1 \frac{m_1 - a}{2} \quad \text{である。}$$

⑥ よし

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} - \frac{m_1 - a}{2} &= 8m_1 \\ -\frac{m_1}{2} &= 8m_1 \quad \therefore 8 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

⑦ に代入し

$$\begin{aligned} k_1 - m_1 \cdot \frac{m_1 - a}{2} &= -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ k_1 &= \frac{1}{2}m_1(m_1 - a) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= P_1 K_1 \\ &= \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - x_1\right)^2 + (k_1 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{m_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+m_1^2} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{1+m_2^2} \\ \left(\begin{array}{l} \ell_2 \text{ の方向ベクトルは } (1, m_2) \\ P_2 K_2 \text{ の } : (m_2, -1) \\ \overrightarrow{P_2 K_2} = s'(m_2, -1) \text{ とすると } s' = -\frac{1}{2} \\ K_2 = \frac{1}{2}m_2(m_2 - a) + \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$r_1 = r_2 = 1: 2 \text{ よし}$$

$$2 - \frac{1}{2}\sqrt{1+m_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+m_2^2} \quad \downarrow m_1 m_2 = -1 \quad 2 \text{ 乗}$$

$$4 \cdot \left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right) = 1 + m_2^2$$

$$m_2^2 = 4$$

$$m_1 m_2 = -1 \quad m_1 < m_2 \text{ かつ } m_2 > 0 \text{ のため}$$

$$m_2 = 2, \quad (\text{以下略})$$

解法 5-2 解法 2 の続き

$$x_1 = -\sqrt{b} \quad y_1 = m_1 x_1 = -m_1 \sqrt{b} \quad \text{である。}$$

⑥ よし

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} - (-\sqrt{b}) &= 8m_1 \quad \downarrow m_1 = a - 2\sqrt{b} \\ -\frac{1}{2}(a - 2\sqrt{b}) &= 8(a - 2\sqrt{b}) \end{aligned}$$

$$\therefore 8 = -\frac{1}{2}$$

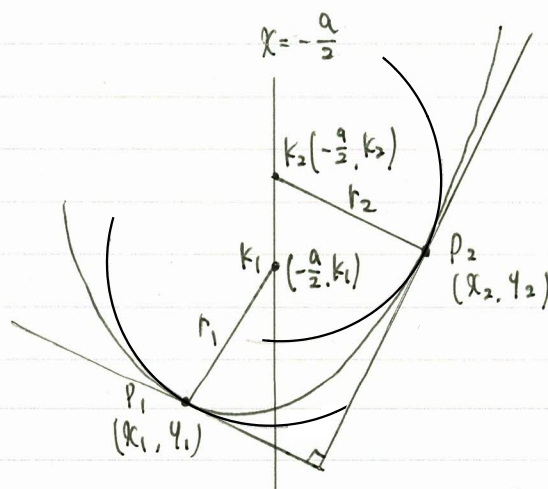
$$\begin{aligned} \text{⑦ に代入し } k_1 - (-m_1 \sqrt{b}) &= -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ k_1 &= -m_1 \sqrt{b} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= P_1 K_1 \\ &= \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - x_1\right)^2 + (k_1 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \downarrow m_1 = a - 2\sqrt{b} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+m_1^2} \end{aligned}$$

$$\text{同様に } r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1+m_2^2}$$

以下、左と同様。

解法 6. 円と放物線が接する条件を利用



$$C: y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \left(b = \frac{a^2 + 1}{4} \text{ を使えば}\right)$$

円の方程式は

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ とおく。}$$

2022年

東大数学

文系第1問⑤

$$C: y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \times$$

$$D: \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = t^2 \text{ と連立し } (x \text{ 消去})$$

$$y - \frac{1}{4} + (y - k)^2 = t^2$$

$$y^2 + (1 - 2k)y + k^2 - t^2 - \frac{1}{4} = 0$$

円と放物線が接するので、

この2次方程式が重解を持つ。

$$(\text{判別式}) = (1 - 2k)^2 - 4\left(k^2 - t^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

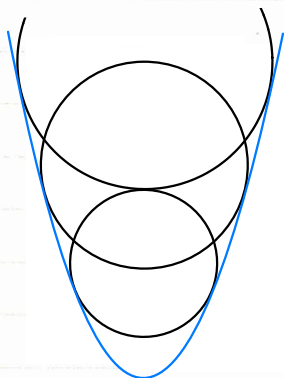
$$\therefore k = t^2 + \frac{1}{2}$$

$$y^2 + (1 - 2k)y + k^2 - t^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{か}$$

$$k = t^2 + \frac{1}{2} \text{ を満たすと、}$$

放物線Cと円が接する。

このように (y, k, t) の解の組は、
無数にある。



このように、

円と放物線が
接する図は
たくさん書ける。

ここから、
半径の比が
1:2 になるという
ものを探す。

$$k = t^2 + \frac{1}{2} \text{ を代入し、}$$

$$y^2 - 2t^2y + \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$y^2 - 2t^2y + t^4 = 0$$

$$(y - t^2)^2 = 0$$

$$y = t^2$$

よって、 P_1 の座標は (x_1, y_1) とすると、

$$y_1 = m_1 x_1 \quad (Q_1 \text{ 上}) \quad \text{か} \quad y_1 = r_1^2 \quad (\times \text{ あり})$$

同様に、 $Q_2 = m_2 x_2$ か、 $Q_2 = r_2^2$ であり、

仮定から、 $2r_1 = r_2$ である。

$$\therefore 4r_1^2 = r_2^2 \text{ に } y_1 = r_1^2 \quad y_2 = r_2^2 \text{ を代入し、}$$

$$4y_1 = y_2$$

解法 6-1. 解法1の続き、

$$x_1 = \frac{m_1 - a}{2} \quad y_1 = m_1 x_1 = m_1 \cdot \frac{m_1 - a}{2}$$

$$x_2 = \frac{m_2 - a}{2} \quad y_2 = m_2 x_2 = m_2 \cdot \frac{m_2 - a}{2} \quad \text{とあり、}$$

$$4y_1 = y_2 \text{ に代入し、}$$

$$4m_1 \cdot \frac{m_1 - a}{2} = m_2 \cdot \frac{m_2 - a}{2}$$

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{1}{2} \\ m_2 = 2. \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

(xx) の解が m_2
となる。

$$m_1^2 - 2am_1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m_2^2 = 2am_2 + 1$$

を連立して解く。

解法 6-2. 解法2の続き、

$$x_1 = -\sqrt{b} \quad y_1 = m_1 x_1 = (a - 2\sqrt{b}) \cdot (-\sqrt{b})$$

$$x_2 = \sqrt{b} \quad y_2 = m_2 x_2 = (a + 2\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}$$

とあり、

$$4y_1 = y_2 \text{ に代入し、}$$

$$4(a - 2\sqrt{b})(-\sqrt{b}) = \sqrt{b}(a + 2\sqrt{b})$$

$$5a = 6\sqrt{b}$$

$$5a = 6 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 1}{4}}$$

↓ 2乗

$$25a^2 = 9(a^2 + 1)$$

$$a^2 = \frac{9}{16}$$

$$a > 0 \text{ より}$$

$$a = \frac{3}{4}$$

//